اختبار الفروض الإحصائية

Testing of Statistical Hypotheses

تعريف 3.1

الفرض الإحصائي Smple hypothesis

هو اقتراح عن قيمة بارامتر مجهول لمجموعة عامة معلومة التوزيع أو عن توزيع غير معلوم لمجموعة عامة معطاة.

والفرض الإحصائي يسمى فرض بسيط Simple hypothesis إذا اشتمل على اقتراح واحد للبارامتر وفيما عدا ذلك يسمى فرض مركب .Composite hyp أي إذا اشتمل على أكثر من اقتراح أو أكثر من فرض بسيط . فإذا أعطينا مجموعة عامة بتوزيع معلوم تعتمد على البارامتر الوحيد θ فإن صيغة الفرض البسيط تكون على صورة $\theta = \theta_0$ بينما صيغة الفرض المركب تأخذ إحدى الصور $\theta > \theta_0$ أو $\theta < \theta_0$ أو $\theta \neq \theta_0$

وإذا كانت المجموعة المعطاة تعتمد على أكثر من بارامتر فإن الفرض عن أحد هذه البارامترات يكون فرض بسيط إذا كانت بقية البارامترات معلومة. وفيما عدا ذلك يسمى بالفرض الصفري Null hyp أو الفرض البديل Alternative hyp ونرمز له بالرمز H_1 وهو الفرض المتوقع صحته.

خطوات الفروض الإحصائية على النحو التالي:

$$1)\ put\ \ H_o : \theta = \hat{\theta}$$

$$2)\ H_1 : \theta \succ \hat{\theta}\ or\ \theta \prec \hat{\theta}\ or\ \theta \neq \hat{\theta}$$

$$3)\ \alpha, cret.reg.$$

$$4)\ \ Put\ statistic(Z, T, \chi^2, F, ...)$$

$$5)\ Copr.\ betn.(3),(4)$$

$$6) Conc.\ H_o\ \ Acept. \therefore H_1\ \ \mathrm{Re}\ j$$

تصاغ الفروض الإحصائية على النحو التالي:

$$H_1 : u > 3 \text{ ، } H_0 : u \leq 3$$

باعتبار أن المتوسط μ لوزن المواليد الأطفال المتوقع أكبر من 3 كيلو جرامات فإن صيغة الفرض البديل تأخذ إحدى الصور الآتية

$$H:\theta \neq \theta_0 \text{ أو } H_1:\theta < \theta_0 \text{ أو } H_1:\theta > \theta_0$$

وفى الحالتين الأولى والثانية يكون محال الاختبار بجهة واحدة يمنى أو يسرى وتكون هناك نقطة اختبار واحدة يمنى K_2 أو يسرى K_1 في الحالة الأولى يتحدد الاختبار بالمتباينة $K_2 \leq K < \infty$ ومجال القبول بالمتباينة $-\infty < K < K_2$ حيث $\alpha = P\left(K \geq K_2\right)$

ويتحدد مجال الاختبار في الحالة الثانية بالمتباينة $-\infty < K \leq K_1$ ومجال القبول بالمتباينة $K_1 < K < \infty$ حيث $\alpha = P\left(K \leq K_1\right)$

أما في الحالة الثالثة فإن مجال الاختبار يكون بجهتين يمنى ويسرى يحصران بينهما مجال قبول الفرص بواسطة نقطتين للاختبار يمنى ويسرى. وفى هذه الحالة يتحدد مجال الاختبار بالمتباينات الآتية $K \geq K_2$ أو $K \geq K_1$ ومجال القبول بالمتباينة $K_1 < K < K_2$ حيث

$$\alpha = P\left(K \leq K_1 or\, K \geq K_2\right)$$

أو $\frac{\alpha}{2} = P\left(K \geq K_2\right)$ ، $\frac{\alpha}{2} = P\left(K \leq K_1\right)$

ونلاحظ أن نمط الاختبار اليسرى K_1 تكون سالبة ومتماثلة بالنسبة للنمط K_2 في حالتي توزيع z ، t

<u>(i) اختبار الفرض عن المتوسط العام μ :</u>

اعتبر مجموعة عامة بالتوزيع المعتدل بالبارامترات μ ، σ^2 ونختار منها عينة عشوائية حجمها n ، متوسطها الحسابي $\bar{x}$ وتباينها S^2. وتناقش هنا حالتي معلومية وعدم معلومية التباين العام σ^2

<u>الحالة الأولى :</u>

عندما يكون σ^2 بارامتر معلوم.

$$1)\ put\ \ H_o : \mu = \mu_o$$
$$2) H_1 : \mu \succ \mu_o or \prec or \neq$$
$$3)\ \alpha, cret.reg.$$
$$4)\ \ Put\, statistic (Z = \frac{\overline{x} - \mu}{\sigma} \sqrt{n})$$
$$5)\ Copr.\ betn. (3), (4)$$
$$6) Conc.\ H_o\ \ Acept. \therefore H_1\ \ \text{Re}\ j$$

مثال 3.1 :

من مجموعة عامة بالتوزيع المعتدل بالبارامترات μ ، $\sigma^2 = 25$ اختيرت عينة عشوائية حجمها $n = 25$ ، إذا كان $\overline{x} = 80$ اختير الفرض الصفري $H_0 : \mu = 90$ مقابل الفرض البديل $H_1 : \mu \neq 90$ عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$

الحل:

$$1)\ put\ \ H_o : \mu = 90$$
$$2) H_1 : \mu \neq 90$$
$$3)\ \alpha = 0.05, cret.reg. (z_{\frac{\alpha}{2}} = 0.475)$$
$$4)\ \ Put\, statistic (Z = \frac{\overline{x} - \mu}{\sigma} \sqrt{n} = \frac{80 - 90}{5} \sqrt{25} = -10$$
$$5)\ Copr.\ betn. (3), (4) \rightarrow \left| -10 \right| = 10 \succ 0.475$$
$$6) Conc.\ H_1\ \ Acept. \therefore H_o\ \ \text{Re}\ j$$

الحالة الثانية :

عندما يكون التباين العام σ^2 غير معلوم

في هذه الحالة إما أن تكون العينة العشوائية(1) كبيرة $n \geq 30$ أو(2) عينة صغيرة $n < 30$

أولا: $n \geq 30$

$$1)\ put\ \ H_o : \mu = \mu_o$$
$$2)\ H_1 : \mu \succ \mu_o or \prec or \neq$$
$$3)\ \alpha, cret.reg.$$
$$4)\ \ Put\, statistic (Z = \frac{\overline{x} - \mu}{s} \sqrt{n})$$
$$5)\ Copr.\ betn.(3),(4)$$
$$6) Conc.\ H_o\ \ Acept. \therefore H_1\ \ \mathrm{Re}\ j$$

ثانيا: n<30

$$1)\ put\ \ H_o : \mu = \mu_o$$
$$2)\ H_1 : \mu \succ \mu_o or \prec or \neq$$
$$3)\ \alpha, cret.reg.$$
$$4)\ \ Put\, statistic (T = \frac{\overline{x} - \mu}{s} \sqrt{n})$$
$$5)\ Copr.\ betn.(3),(4)$$
$$6) Conc.\ H_o\ \ Acept. \therefore H_1\ \ \mathrm{Re}\ j$$

<u>مثال 3.2 :</u>

القراءات الآتية أوزان 7 أطفال حديثي الولادة في إحدى مراكز الطفولة مقاسه بالكيلو جرامات

$$2.9, 3.1, 3.4, 4.1, 3.7, 3.5, 3.8$$

نفرض أن وزن الطفل يخضع للتوزيع المعتدل – اختبر الفرض الصفري عند المتوسط العام μ

$H_0 : \mu \leq 3.7$ مقابل الفرض البديل $H_1 : \mu > 3.7$ وذلك عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.025$

<u>الحل :</u>

من صيغة الفرض البديل يتضح أن مجال الاختبار بجهة واحدة نوجد أولا متوسط وتباين العينة

$$S^2 = \frac{\sum (x_i - \overline{x})}{n-1} = 0.16 \text{ ، } \overline{x} = \frac{\sum x_1}{n} = 3.5$$

وحيث أن σ^2 غير معلومة، $n < 30$ فإن

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{S} \sqrt{n} = \frac{3.5 - 3.7}{0.04} \sqrt{7} = -1.32$$

$$1)\ put\ \ H_o : \mu \le \mu_o$$
$$2)\ H_1 : \mu \succ \mu_o$$
$$3)\ \alpha = 0.025, cret.reg.T = 2.447$$
$$4)\ \ Put\, statistic (T = \frac{\bar{x} - \mu}{s}\sqrt{n} = 1.32$$
$$5)\ Copr.\ betn. (3), (4) \to 2.447 \succ 1.32$$
$$6) Conc.\ H_o\ \ Acept. \therefore H_1\ \ \text{Re}\ j$$

(ii) اختبار الفرق بين متوسطين :

اعتبر مجموعتين بالتوزيع المعتدل بالبارامترات μ_1 ، σ_1^2 ، μ_2 ، σ_2^2 فالمطلوب هو المقارنة بين المتوسطين μ_1 ، μ_2 عند مستوى المعنوية α نختار من هاتين المجموعتين عينتين مستقلتين حجومها على الترتيب n_1 ، n_2.

نفرض أن $\bar{x}_1$ ، $\bar{x}_2$ ، S_1^2 ، S_2^2 هي قيم المتوسط والتباين على الترتيب لهاتين العينتين.

للمقارنة بين المتوسطات العامة μ_1 ، μ_2 نصيغ الفروض الإحصائية على النحو التالي :

(1)الفرض الصفري $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ والفرض البديل يأخذ إحدى الصورتين

(2) $H_1 : \mu_1 < \mu_2$ أو $H_1 : \mu_1 > \mu_2$ أي أن مجال الاختبار يكون بجهة واحدة يسرى أو يمنى.

وإذا كانت المعلومات عن μ_1 ، μ_2 غير كافية يأخذ الفرض البديل الصورة $H_1 : \mu_1 \ne \mu_2$ أي أن مجال الاختبار بجهتين يمنى ويسرى. وبالمثل كما سبق نعتبر الحالتين σ_1^2 ، σ_2^2 بارامترات معلومة أو σ_1^2 ، σ_2^2 بارامترات غير معلومة

الحالة الأولى :

عندما تكون التباينات σ_1^2 ، σ_2^2 بارامترات معلومة في هذه الحالة نستخدم الإحصائية

$$z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

مثال 3.4 :

اختيرتا العينتان المستقلتان ذات الحجوم $n_1 = 36$ ، $n_2 = 36$ من مجموعتين بالتوزيع المعتدل بالبارامترات μ_1 ، $\sigma_1 = 8$ ، μ_2 ، $\sigma_2 = 6$ إذا كانت $\bar{x}_1 = 112$ ، $\bar{x}_2 = 10.8$ قارن بين المتوسطات العامة μ_1 ، μ_2 عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$

<u>الحل :</u>

للمقارنة بين المتوسطات العامة μ_1 ، μ_2 تكون الفروق الإحصائية على النحو التالي :

$$1\text{- } H_0 : \mu_1 = \mu_2 \sqrt{2} \quad ، \quad 2\text{-} H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

أي أن مجال الاختبار بجهتين.

من الجداول الإحصائية III نوجد القيمة الجدولية $z_{\alpha/2}$ باستخدام العلاقة

$$3\text{-} \phi\left(z_{\alpha/2}\right) = 0.5 - \alpha/2$$

وحيث أن مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$ فإن $\alpha = 0.025$

$$\phi\left(z_{\alpha/2}\right) = 0.5 - 0.025 = 0.475$$

أي أن

$$z_{\alpha/2} = 1.96$$

وبالتعويض في الإحصائية

$$4\text{-} z = \frac{\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right) - \left(\mu_1 - \mu_2\right)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

نجد أن

$$z = \frac{\left(112 - 108\right)}{\sqrt{\frac{64}{36} + \frac{36}{36}}} = 2.4$$

وحيث أن

$$5\text{-} |z| = 24 > 196 = z_{\alpha/2}$$

6-عندئذ يرفض الفرض الصفري ويقبل البديل – أي أن الاختلافين المتوسطات العامة μ_1 ، μ_2 اختلاف جوهري عند مستوى المعنوية 0.05

الحالة الثانية :

عندما تكون التباينات العامة σ_1^2 ، σ_2^2 غير معلومة وفى هذه الحالة نعتبر حالتي العينات كبيرة $n_1 \quad n_2 \geq 30$ يمكن إحلال تباينات العينات S_1^2 ، S_2^2 بدلا من التباينات المجهولة σ_1^2 ، σ_2^2 ثم يتبع نفس الخطوات السابقة

مثال 3.5 :

من مجموعتين بالتوزيع المعتدل بارامترات μ_1 ، σ_1 ، μ_2 ، σ_2 اختبرنا عينتان مستقلتان بالبيانات الآتية

بيانات العينة الأولى $n_1 = 40 \qquad \bar{x}_1 = 23 \qquad S_1^2 = 48$

بيانات العينة الثانية $n_2 = 35 \qquad \bar{x}_2 = 25 \qquad S_2^2 = 98$

اختبر صحة الفرض الصفري $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ مقابل الفرض البديل $H_1 : \mu_1 < u_2$ عند مستوى المعنوية 0.05

الحل :

من صيغة الفرض البديل يتضح أن مجال الاختبار بجهة واحدة وحيث أن التباينات العامة غير معلومة والعينات كبيرة فإن

$$z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

نجد أن

$$\phi(z_\alpha) = 0\ 5 - 0\ 05 = 0\ 45$$

ومن ثم فإن

$$z_\alpha = 1\ 645$$

وحيث أن $z_\alpha = 1\ 645 \quad > |z| = 1$ عندئذ يقبل الفرض الصفري ويرفض البديل – أي أن الاختلاف بين المتوسطات العامة اختلاف غير جوهري عند مستوى المعنوية 0.05 إذا كانت التباينات العامة غير معلومة وفى نفس الوقت العينات صغيره في هذه الحالة يفترض أن التباينات العامة الغير معلومة مساوية أي أن $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ ويمكن تقدير هنا البارامترات المجهولة من

خلال التقدير المشارك S_{β}^{2} ومن تم يتم اختبار الفروض الإحصائية وفى هذه الحالة باستخدام الإحصائية

$$t=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{Sp\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$$

التي تخضع لتوزيع ستودنت بدرجات الحرية n_1+n_2-2 نحسب قيمة هذا المتغير t من البيانات المعطاة وطبقا لصيغة الفرض البديل H_1 الذي يحدد مجالات الاختبار بجهة واحدة أو بجهتين نوجد من الجداول الإحصائية IV القيم الجدولية t_{α,n_1+n_2-2} أو $t_{\alpha/2,n_1+n_2-2}$

ومن ثم يكون القرار على النحو التالي

يرفض الفرض الصفري ويقبل البديل طالما كان

$$|t|\geq t_{\alpha,n_1+n_2-2} \quad \text{أو} \quad |t|\geq t_{\alpha/2,n_1+n_2-2}$$

وفيما عدا ذلك يقبل الفرض الصفري ويرفض البديل – أي أن الاختلاف بين المتوسطات العامة μ_1 ، μ_2 اختلاف غير جوهري

إذا كان $|t|<t_{\alpha,n_1+n_2-2}$ أو $|t|<t_{\alpha/2,n_1+n_2-2}$

<u>مثال 3.6 :</u>

القراءات الآتية تمثل أوزان عينتين من الفئران من قريتين متجاورتين مقاسه بالجرامات.

أوزان فئران العينة الأولى : $345,350,320,325,340$

أوزان فئران العينة الثانية : $430,420,450,436,424,444$

بفرض أن أوزان الفئران في القريتين تخضع للتوزيع المعتدل بالبارامترات μ_1 ، μ_2 ،

$$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$$

اختبر صحة الفرض الصفري $H_0:\mu_1=\mu_2$ مقابل

الفرض البديل $H_1:\mu_1<\mu_2$

عند مستوى المعنوية $\alpha=0.01$

<u>الحل :</u>

نوجد أولا متوسط وتباين كل من العينتين :

$\bar{x}_1=336$ ، $S_1^2=167.5$ ، $\bar{x}_2=434$ ، $S_2^2=134.4$

نوجد بعد ذلك S^2

$$S^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

وقيمة المتغير

$$t=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{S\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$$

$$=\frac{336-434}{12.21\sqrt{\frac{1}{5}+6}}=-13.25$$

IV من صيغة الفرض البديل يتضح أن مجال الاختبار بجهة واحدة. ومن الجداول الإحصائية عند مستوى المعنوية 0.01 ودرجات الحرية و نجد أن

$$t_{0.0,9}=2\ 821$$

وحيث أن

$$|t|=3\ 25>2\ 821=t_{\alpha,n_1+n_2-2}$$

فإن الاختلاف بين المتوسطات العامة اختلاف جوهري عند مستوى المعنوية 0.01 أي أن وزن الفئران في القرية الثانية أكبر من وزن الفئران في القرية الأولى.

(iii) اختبار الفرض عن التباين العام σ^2 :

اعتبر مجموعة عامة بالتوزيع المعتدل بالبارامترات μ ، σ^2 والمطلوب هو اختبار الفرض عن التباين العام σ^2 عند مستوى المعنوية نفرض أن S^2 هو تباين عينة عشوائية حجمها n من هذه المجموعة العامة.

لاختبار الفرض عن التباين العام σ^2 نستخدم الإحصائية

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$

والتي تخضع لتوزيع مربع كاى بدرجات الحرية $n-1$ طبقا لنظرية 2.9

نفرض أن القيمة المقترحة للتباين العام σ^2 هي σ_0^2 عندئذ يكون مجال الاختبار بجهة واحدة يمنى أو يسرى على الترتيب إذا كان الفرض الصفري $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$ مقابل الفرض البديل

$H_1:\sigma^2>\sigma_0^2$ أو $H_0:\sigma^2<\sigma_0^2$

نحسب قيمة المتغير χ^2 من البيانات المعطاة ثم نوجد من الجداول الإحصائية V نقطتي الاختبار اليمنى واليسرى على الترتيب $\chi^2_{\alpha,n-1}$ ، $\chi^2_{1-\alpha,n-1}$ ثم يأخذ القرار على النحو التالي بالنسبة للجهة اليمنى يرفض الفرض الصفري ويقبل البديل إذا كان $\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha,n-1}$

وفيما عدا ذلك يرفض الفرض الصفري ويقبل البديل $\chi^2 < \chi^2_{\alpha,n-1}$ بالنسبة للجهة اليسرى يرفض الفرض الصفري ويقبل البديل إذا كان $\chi^2 \leq \chi^2_{1-\alpha,n-1}$

وفيما عدا ذلك يقبل الفرض الصفري البديل إذا كان $\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha,n-1}$

ومجال الاختبار يكون بجهتين يمنى ويسرى إذا كانت الفروض الإحصائية على النحو التالي :

الفرض الصفري $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ مقابل الفرض البديل $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

في هذه الحالة نوجد نقطتي الاختبار $x_{\alpha/2,n-1}$ ، $x^2_{1-\alpha/2,n-1}$ من الجداول الإحصائية V طبقا لمستوى المعنوية α ودرجات الحرية $n-1$ ثم يأخذ القرار على النحو التالي :

يرفض الفرض الصفري ويقبل البديل أي أن الاختلاف بين القيمة المقترحة σ_0^2 والقيمة الفعلية للتباين σ^2 اختلاف معنوي طالما كان

$$\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha/2,n-1} \quad \text{أو} \quad \chi^2 \leq \chi^2_{1-\alpha/2,n-1}$$

وفيما عدا ذلك يقبل الفرض الصفري ويرفض البديل إذا كان

$$\chi^2_{1-\alpha/2,n-1} < \chi^2 < \chi^2_{\alpha/2,n-1}$$

أي أن الاختلاف غير معنوي

<u>مثال 3.7 :</u>

اختيرت عينة عشوائية حجمها $n = 10$ من مجموعة عامة بالتوزيع المعتدل . إذا كان تباين العينة $S^2 = 25$ اختبر صحة الفرض الصفري $H_0 : \sigma^2 = 27$

مقابل الفرض البديل $H_1 : \sigma^2 \neq 27$ وذلك عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.01$

<u>الحل :</u>

من صيغة الفرض البديل يتضح أن مجال الاختبار بجهتين وعند درجات الحرية $n-1=18$

ومستوى المعنوية $\alpha = 0.01$ نلاحظ أن

$$\alpha/2 = 0.005 \text{ ، } 1-\alpha/2 = 0.995$$

ومن الجداول الإحصائية V نجد أن

النقطة اليمنى $x^2_{\alpha/2,n-1} = x^2_{0.005,18} = 37.156$

النقطة اليسرى $x^2_{1-\alpha/2,n-1} = x^2_{0.995,18} = 6.265$

ثم نحتسب قيمة المتغير x^2 من البيانات المعطاة

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{(18)(25)}{27} = 16.67$$

وحيث أن $\chi^2_{1-\alpha/2,n-1} < \chi^2 < \chi^2_{\alpha/2,n-1}$

عندئذ يقبل الفرض الصفري ويرفض البديل عند مستوى المعنوية المعطى 0.01 أي أن الاختلاف بين القيمة الفعلية والقيمة المقترحة للتباين اختلاف غير جوهري.

<u>مثال 3.8 :</u>

القراءات الآتية :

$$3.84, 4.24, 3.25, 3.71, 5.28, 4.52, 5.20, 4.80$$

تمثل أوزان عينة حيوانات التجارب مقاسه بالكيلو جرامات. إذا علم أن التغير في الأوزان يخضع للتوزيع المعتدل – اختبر صحة الفرض

الفرض الصفري $H_0 : \sigma^2 = 1.9$

مقابل الفرض البديل $H_1 : \sigma^2 < 1.9$

وذلك عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$

<u>الحل :</u>

نوجد أولا متوسط العينة $\bar{x}$ وذلك لحساب تباين العينة

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = 4.33$$

$$S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = 0.525$$

ومن ثم فإن

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{(7)(0.525)}{1.9} = 1.93$$

من صيغة الفرض البديل يتضح أن مجال الاختبار بجهة واحدة يسرى وعند مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$ نجد أن نقطة الاختبار اليسرى هي

$$\chi^2_{1-\alpha,n-1} = \chi^2_{0.95.7} = 2.167$$

وحيث أن

$$\chi^2 = 1.93 < 2.167 = \chi^2_{0.95,7}$$

يكون الفرض الصفري مرفوض والفرض البديل مقبول، أي أن التباين العام σ^2 للمجموعة المعطاة أقل من 1.9 عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$

لبيانات هذا المثال نلاحظ أن نقطة الاختبار اليسرى عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.025$ هي

$$\chi^2_{1-\alpha,n-1} = \chi^2_{0.975,7} = 1.69$$

وواضح أنه لا يمكن رفض الفرض الصفري عن القيمة المقترحة للتباين عند مستوى المعنوية 0.025 أي أن الاختلاف بين القيمة الفعلية σ^2 والقيمة المقترحة σ_0^2 اختلاف معنوي عند مستوى المعنوية 0.05 بينما الاختلاف غير المعنوي عند المستوى 0.025

(iv) اختبار الفرق بين تباينين :

المقارنة بين التباينات للمجموعات العامة كما سبق أن ذكرنا تلعب دورا هاما في التطبيقات العملية خاصة في التعرف على الأجهزة ذات الدقة المتناهية أو الصالحة للاستعمال أو للتعرف على أفضل الطرق القياسية المستخدمة. فمن المعروف أن أفضل الأجهزة والطرق القياسية هي التي تعطى قياسات بحيث يكون التشتت لها أقل ما يمكن.

اعتبر لذلك مجموعتين بالتوزيع المعتدل بالبارامترات μ_1 ، σ_1^2 ، μ_2 ، σ_2^2 ونختار من هاتين المجموعتين عينتين مستقلتين حجومهما على الترتيب n_1 ، n_2 نفرض أن S_1^2 ، S_2^2 هي قيم التباين لهما.

في اختبار الفروض الإحصائية عن التباينات نستخدم الإحصائية

$$F = \frac{S_1^2 \sigma_2^2}{S_2^2 \sigma_1^2}$$

والتي تخضع لتوزيع F بدرجات الحرية $n_1 - 1$ ، $n_2 - 1$ على الترتيب وذلك من النظرية 3.13

نصيغ بعد ذلك الفروض الإحصائية :

حالة مجال الاختبار بجهة واحدة يمنى :

الفرض الصفري $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ مقابل الفرض البديل $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$

نحسب قيمة المتغير

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

ثم من الجداول الإحصائية VI نوجد نقطة الاختبار اليمنى F_{α, n_1-1, n_2-1}

عند مستوى المعنوية $\propto$ ودرجات الحرية $n_1 - 1$ ، $n_2 - 1$ عندئذ يرفض الفرض الصفري ويقبل البديل إذا كان $F \geq F_{\alpha, n_1-1, n_2-1}$

أي أن تباين المجموعة الأولى σ_1^2 أكبر من تباين المجموعة الثانية σ_2^2 وفيما عدا ذلك يقبل الفرض الصفري ويرفض البديل إذا كان $F \geq F_{\alpha, n_1-1, n_2-1}$

حالة مجال الاختبار بجهة واحدة يسرى :

الفرض الصفري $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ مقابل الفرض البديل $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ في هذه الحالة نظرا لأن توزيع فيشر يعتمد على بارامترين هما درجات الحرية υ_1 ، υ_2 وأيضا من خواص هذا التوزيع يمكن استبدال المجال الأسر بمجال أيمن، أي نصيغ الفرض البديل في الصورة $H_1 : \sigma_2^2 > \sigma_1^2$ وذلك بإحلال σ_2^2 محل σ_1^2 ثم نتبع نفس الخطوات السابقة على أن تصبح قيمة المتغير F هي

$F = \frac{S_2^2}{S_1^2}$ ونقطة الاختبار هي F_{α, n_2-1, n_1-1} حيث $S_2^2 > S_1^2$

حالة مجال الاختبار بجهتين :-

الفرض الصفري $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ مقابل الفرض البديل $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

في هذه الحالة يوجد مجالان للاختبار مجال أيمن وأخر أيسر وبالتالي يوجد نقطتان للاختبار

نقطة الاختبار اليمنى $F_{\alpha/2, n-1, n_2-1}$

ونقطة الاختبار اليسرى $F_{1-\alpha/2, n_1-1, n_2-1}$

وكما سبق أن ذكرنا يمكن استبدال المجال الأيسر بمجال أيمن ومن ثم يكون القرار على النحو التالي :

يرفض الفرض الصفري ويقبل البديل طالما كان

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} \geq F_{\alpha/2, n_1-1, n_2-1} \qquad \text{أو} \qquad \frac{S_2^2}{S_1^2} \geq F_{\alpha/2, n_2-1, n_1-1}$$

وفيما عدا ذلك يقبل الفرض الصفري ويرفض البديل إذا كان

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} < F_{\alpha/2, n_1-1, n_2-1} \qquad \text{أو} \qquad \frac{S_2^2}{S_1^2} \geq F_{\alpha/2, n_2-1, n_1-1}$$

مثال 3.9 :

من مجموعتين بالتوزيع المعتدل اختيرتا العينتان المستقلتان ذات الحجوم $n_1 = 19$ ، $n_2 = 25$.

فإذا كان $S_1^2 = 0.28$ ، $S_2^2 = 0.39$ اختبر صحة الفرض الصفري $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ مقابل الفرض البديل $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ وذلك عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.1$

الحل :

نلاحظ هنا أن $S_2^2 > S_1^2$ عندئذ قيمة المتغير F هي

$$F = \frac{S_2^2}{S_1^2} = \frac{0.39}{0.28} = 1.39$$

ومن الجداول الإحصائية VI عند مستوى المعنوية $\propto = 0.1$ نجد أن

$$F_{\alpha/2, n_2-1, n_1-1} = F_{0.05,24,18} = 2.15$$

وحيث أن

$$F = 1.39 < 2.15 = F_{0.05,24,18}$$

عندئذ يرفض الفرض البديل ويقبل الصفري أي أن الاختلاف بين التباينات σ_1^2 ، σ_2^2 اختلاف غير جوهري عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.1$